إجابات تمارين مراجعة نهاية الوحدة الأولى

١) أ $٩س^{٢} - ١٥س$

فكّ $(٣س - أ)^{٢} - ب$ لتحصل على:

$٩س^{٢} - ٦أس + أ^{٢} - ب$

قارن الناتج مع $٩س^{٢} - ١٥س$ تحصل على:

$-٦أ = -١٥$، $-أ^{٢} - ب = ٠$

$أ = \frac{٥}{٢}$، $ب = \frac{٢٥}{٤}$

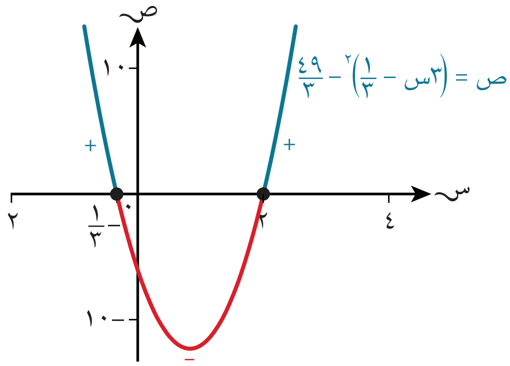
وعليه، $٩س^{٢} - ١٥س = \left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٢٥}{٤}$

ب يمكن كتابة $٩س^{٢} - ١٥س > ٦$ في صورة:

$$\left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٢٥}{٤} > ٦$$

استخدم منحنى الدالّة

$$ص = \left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٤٩}{٤} > ٠$$



هذا منحنى دالّة تربيعية شكله على شكل U،

نجد المقاطع من محور السينات بحل المعادلة:

$$\left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٤٩}{٤} = ٠$$

$\left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} = \frac{٤٩}{٤}$ خذ و/أو حلّ الجذر التربيعي للطرفَين لتحصل على:

$٣س - \frac{٥}{٢} = \pm \frac{٧}{٢}$ حلّ المعادلة تحصل على:

$س = ٢$ أو $-\frac{١}{٣}$

حتى يكون $\left(٣س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٤٩}{٤} > ٠$ نحتاج إلى أن نجد مدى قيم س حيث يكون المنحنى سالبًا (أسفل محور السينات).

الحلّ هو $-\frac{١}{٣} < س < ٢$

٢) $\frac{٣٦}{س^{٤}} + ٤ = \frac{٢٥}{س^{٢}}$ اضرب كل طرف في $س^{٤}$ لتحصل على:

$٣٦ + ٤س^{٤} = ٢٥س^{٢}$ أعد الترتيب لتحصل على:

$٤س^{٤} - ٢٥س^{٢} + ٣٦ = ٠$ .... (١)

افترض أن $ص = س^{٢}$ عوّض عن $س^{٢}$ في المعادلة (١) لتحصل على:

$٤ص^{٢} - ٢٥ص + ٣٦ = ٠$

$(٤ص - ٩)(ص - ٤) = ٠$

$ص = \frac{٩}{٤}$ أو $ص = ٤$

إذا كان $س^{٢} = \frac{٩}{٤}$ فإن $س = \pm \frac{٣}{٢}$

إذا كان $س^{٢} = ٤$ فإن $س = \pm ٢$

٣) $ص = ك س - ٣$ .... (١)

$ص = س^{٢} - ٩س$ .... (٢)

عند نقاط تقاطع المنحنيَين تكون

$س^{٢} - ٩س = ك س - ٣$ صحيحة

أعد ترتيب المعادلة لتحصل على:

$س^{٢} - ٩س - ك س + ٣ = ٠$ أو

$س^{٢} - (٩ + ك)س + ٣ = ٠$

وهذه في صورة $أس^{٢} + ب س + جـ = ٠$

فيكون $أ = ١$، $ب = -(٩ + ك)$، $جـ = ٣$

لتحديد نقاط التقاطع يكون

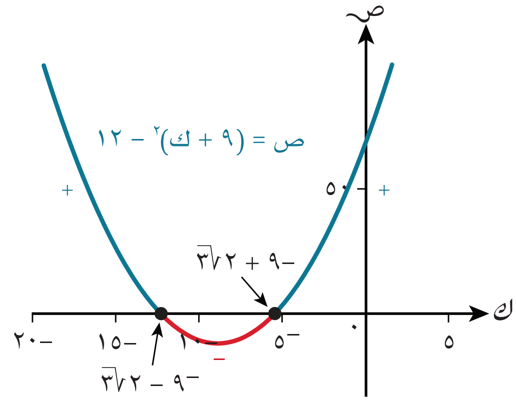
$ب^{٢} - ٤أجـ > ٠$

وعليه، يكون $[-(٩ + ك)]^{٢} - ٤(١)(٣) > ٠$

يكون $(٩ + ك)^{٢} - ١٢ > ٠$

ارسم منحنى الدالّة $ص = (٩ + ك)^{٢} - ١٢$

المنحنى دالّة تربيعية شكله على شكل U



نجد المقطعَين من المحور ك بحلّ:

(٩ + ك)^{٢} − ١٢ = ٠

(٩ + ك)^{٢} = ١٢

٩ + ك = ± √١٢ أو ٩ + ك = ±٢√٣

ك = −٩ + ٢√٣ أو ك = −٩ − ٢√٣

نريد أن نجد قيم مدى ك التي تحقق

(٩ + ك)^{٢} − ١٢ > ٠

أي، حيث يكون المنحنى موجبًا ٠ (فوق المحور ك).

الحلّ هو ك < −٩ − ٢√٣ أو ك > −٩ − ٢√٣

٤) ص = ٢س + ك .... (١)

ص = ١ + ٢ك س − س^{٢} .... (٢)

لنجد نقاط تقاطع المنحنيَين تكون:

٢س + ك = ١ + ٢ك س − س^{٢} (صحيحة)

عند إعادة الترتيب تحصل على:

س^{٢} + ٢ س − ٢ك س + ك − ١ = ٠ أو

س^{٢} + (٢ − ٢ك) س + (ك − ١) = ٠

وهذه في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

فيكون أ = ١، ب = (٢ + ٢ك)، جـ = (ك − ١)

لتحديد نقاط التقاطع يكون

ب^{٢} − ٤أ جـ > ٠

وعليه، يكون (٢ + ٢ك)^{٢} − ٤ × (١) × (ك − ١) > ٠

فكّ الأقواس وبسّط لتحصل على:

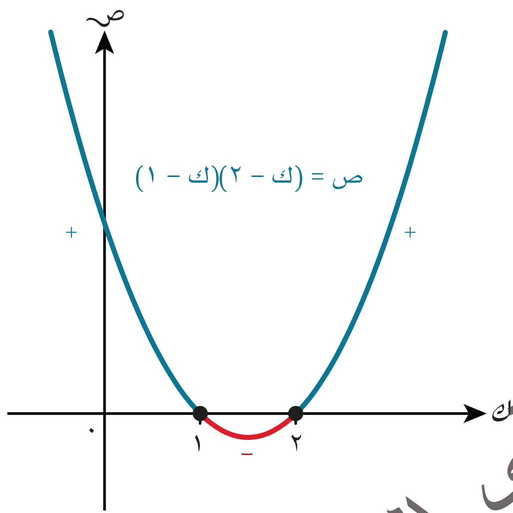
ك^{٢} − ٣ك + ٢ > ٠ أو (ك − ٢)(ك − ١) > ٠

رسم منحنى الدالّة ص = (ك − ٢)(ك − ١) هو
منحنى دالّة تربيعية شكله على شكل ∪

نجد نقاط التقاطع مع المحور ك بحلّ

(ك − ٢)(ك − ١) = ٠

ك = ١ أو ك = ٢



نريد أن نجد قيم مدى ك التي تحقق
(ك − ٢)(ك − ١) > ٠

أي حيث يكون المنحنى موجبًا (فوق محور السينات).

الحلّ هو ك < ١ أو ك > ٢

٥) أ ص = ٤س^{٢} − ١٢س + ٧

الطرف الأيسر لا يحلل إلى العوامل. لذا استخدم طريقة الإكمال إلى مربّع.

حلل أول حدَّين من الطرف الأيسر لتحصل على:

ص = ٤(س^{٢} − ٣س) + ٧

أكمل إلى مربّع لتحصل على:

ص = ٤$\left[\left(\text{س} - \frac{٣}{٢}\right)^{٢} - \frac{٩}{٤}\right]$ + ٧

ص = ٤$\left(\text{س} - \frac{٣}{٢}\right)^{٢}$ − ٢

إحداثيات الرأس هي $\left(١\frac{١}{٢}،\ -٢\right)$

ب ص = ك س + ٣

ص = ٤س^{٢} − ١٢س + ٧

لنجد نقاط تقاطع المنحنيَين تكون

ك س + ٣ = ٤س^{٢} − ١٢س + ٧ صحيحة

أعد الترتيب لتحصل على:

٤س^{٢} − ١٢س − ك س + ٤ = ٠

٤س^{٢} − (١٢ + ك)س + ٤ = ٠

وهذه في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

فيكون أ = ٤، ب = −(١٢ + ك)، جـ = ٤

ليكون المستقيم مماسًا للمنحنى، عندها يوجد حلّ وحيد فقط للمعادلة، ويكون

ب^{٢} − ٤ أ جـ = ٠

وعليه، يكون [−(١٢ + ك)]^{٢} − ٤ × (٤) × (٤) = ٠

ك^{٢} + ٢٤ك + ٨٠ = ٠

(ك + ٤)(ك + ٢٠) = ٠

ك = $^{-}$٤ أو ك = $^{-}$٢٠

٦) ص = ٥ − ٢س + س^{٢} .... (١)

ص = ٢س + ك .... (٢)

أ لنجد نقاط تقاطع المنحنيَين تكون

٥ − ٢س + س^{٢} = ٢س + ك صحيحة

أعد الترتيب لتحصل على:

س^{٢} − ٤س + (٥ − ك) = ٠

ب حيث إن إحدى نقاط التقاطع هي ا($^{-}$٢، ١٣)،

عوّض عن س = $^{-}$٢ لتجد النقطة ب

أي أن، (−٢)^{٢} − ٤(−٢) + (٥ − ك) = ٠

ك = ١٧

عوّض عن ك = ١٧ في س^{٢} − ٤س + (٥ − ك) = ٠

لتحصل على:

س^{٢} − ٤س − ١٢ = ٠

(س − ٦)(س + ٢) = ٠

س = $^{-}$٢ وهو الإحداثي السيني للنقطة ا ، س = ٦ إحداثي السيني للنقطة ب.

عوّض عن س = ٦ في إحدى المعادلتَين (١) أو (٢) لتحصل على:

ص = ٢٩

فتكون النقطة ب (٦، ٢٩)

ج من الجزئية (أ)، س^{٢} − ٤س + (٥ − ك) = ٠

وهذه في صورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠

فيكون أ = ١، ب = $^{-}$٤، جـ = ٥ − ك

حتى يكون المستقيم مماسًا للمنحنى سيكون للمعادلة حلّ واحد فقط، وعليه يكون

ب^{٢} − ٤ ا جـ = ٠

(−٤)^{٢} − ٤(١٠)(٥ − ك) = ٠

ك = ١

لذا فإن س^{٢} − ٤س + ٤ = ٠

حلل إلى العوامل لتحصل على:

(س − ٢)^{٢} = ٠

س = ٢

عوّض عن س = ٢ في المعادلة (١) أو المعادلة (٢) لتحصل على:

ص = ٥

وتكون النقطة ع(٢، ٥)

٧) **أ** س^{٢} − ٥س + ٧ = ٠ تمثّل منحنى دالّة تربيعية شكله على شكل ∪

أكمل إلى المربع لتجد الرأس.

$$ص = \left(س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} - \frac{٢٥}{٤} + ٧$$

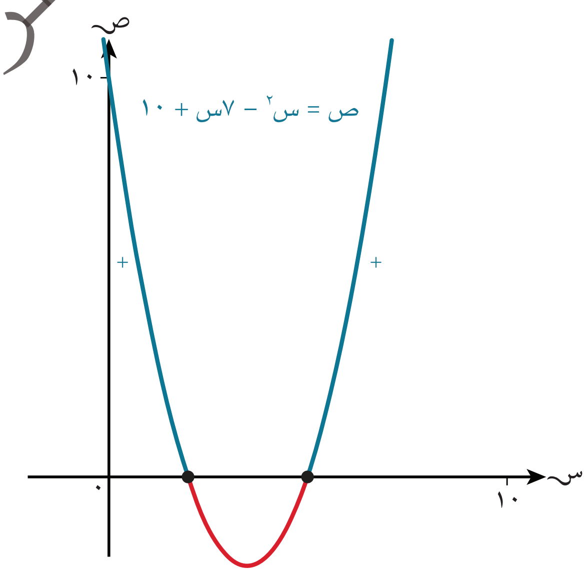
$$ص = \left(س - \frac{٥}{٢}\right)^{٢} + \frac{٣}{٤}$$

الرأس عند $\left(\frac{٥}{٢}،\ \frac{٣}{٤}\right)$ وهو فوق المحور السيني.

وعليه، يكون ص = س^{٢} − ٥س + ٧ يقع فوق محور السينات.

ب عند تقاطع ص = س^{٢} − ٥س + ٧ مع
ص = ٢س − ٣
يكون س^{٢} − ٥س + ٧ = ٢س − ٣
س^{٢} − ٧س + ١٠ = ٠
(س − ٢)(س − ٥) = ٠
س = ٢ أو س = ٥
عوّض عن س = ٢ في ص = ٢س − ٣ لتعطي
ص = ١
عوّض عن س = ٥ في ص = ٢س − ٣ لتعطي
ص = ٧
نقاط التقاطع هي (٢، ١) أو (٥، ٧).

ج س^{٢} − ٥س + ٧ < ٢س − ٣
س^{٢} − ٧س + ١٠ < ٠
رسم المنحنى ص = س^{٢} − ٧س + ١٠، الشكل الناتج منحنى دالّة تربيعية شكله على شكل ∪



يقطع المنحى محور السينات عند س = ٢، س = ٥

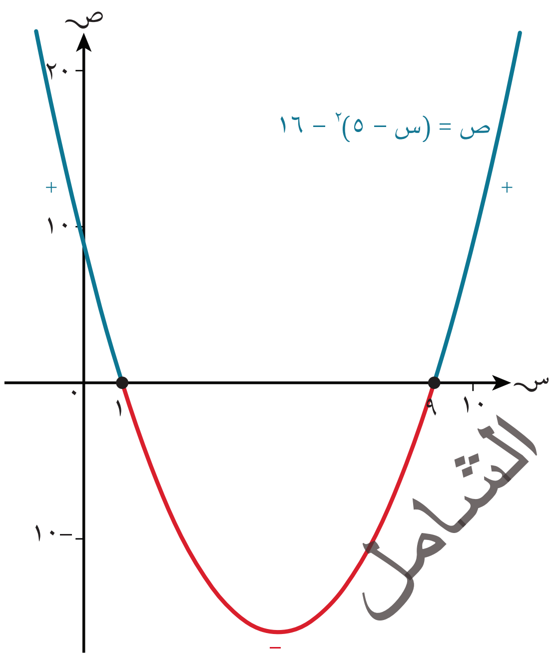
للمتباينة س^{٢} − ٧س + ١٠ < ٠ نجد قيم مدى س التي يكون المنحنى عندها سالبًا تحت محور السينات.

الحلّ هو ٢ < س < ٥

٨) أ ١٠س − س^{٢}
−س^{٢} + ١٠س
−(س^{٢} − ١٠س)
−[(س − ٥)^{٢} − ٢٥]
٢٥ − (س − ٥)^{٢}

ب الرأس عند (٥، ٢٥)

ج ٢٥ − (س − ٥)^{٢} ≤ ٩
(س − ٥)^{٢} − ١٦ ≥ ٠
رسم المنحنى ص = (س − ٥)^{٢} − ١٦، الشكل الناتج منحنى دالّة تربيعية شكله على شكل ∪



لنجد نقاط التقاطع مع محور السينات، حلّ
(س − ٥)^{٢} − ١٦ = ٠
(س − ٥)^{٢} = ١٦ خذ الجذر التربيعي لطرفَي المعادلة لتحصل على:
س − ٥ = ±٤
نقاط التقاطع مع محور السينات عند س = ١، س = ٩
لتكون (س − ٥)^{٢} − ١٦ ≥ ٠ نجد قيم مدى س حيث يكون المنحنى صفرًا أو موجبًا على محور السينات أو فوقه.
الحلّ هو س ≤ ١ أو س ≥ ٩

٩) أ معادلة المنحنى ص = س^{٢} − ٤س + ٤ ومعادلة المستقيم ص = م س، م عدد ثابت. عند نقاط تقاطع المنحنيَين يكون

س^{٢} − ٤س + ٤ = م س

إذا كان م = ١، فإن ص = س

س^{٢} − ٤س + ٤ = س

س^{٢} − ٥س + ٤ = ٠

(س − ١)(س − ٤) = ٠

س = ١ أو س = ٤

عوّض عن س = ١ في ص = س تحصل على ص = ١

عوّض عن س = ٤ في ص = س تحصل على ص = ٤

فإن أ(١، ١)، ب (٤، ٤)

نقطة منتصف اب = $\left(\frac{١ + ٤}{٢}، \frac{١ + ٤}{٢}\right)$ أو $\left(٢\frac{١}{٢}، ٢\frac{١}{٢}\right)$.

ب س^{٢} − ٤س + ٤ = م س

س^{٢} − (٤ + م)س + ٤ = ٠

وهذه المعادلة في الصورة أس^{٢} + ب س + جـ = ٠.

فيكون أ = ١، ب = −(٤ + م)، جـ = ٤

ليكون المستقيم مماسًا للمنحنى فإنه يوجد حلّ واحد فقط للمعادلة

أ^{٢} − ٤أب جـ = ٠

[−(٤ + م)]^{٢} − ٤(١)(٤) = ٠

م^{٢} + ٨ م = ٠

م(م + ٨) = ٠

م = ٠(مرفوض) أو م = −٨

إذا كانت م = −٨ فإن س^{٢} − (٤ + م)س + ٤ = ٠

تصبح س^{٢} + ٤س + ٤ = ٠

(س + ٢)^{٢} = ٠

س = −٢

عوّض عن س = −٢ في ص = −٨س فيعطي

ص = (−٨)(−٢)

ص = ١٦

الإحداثيات هي (−٢، ١٦).

١٠) أ حلل إلى العوامل ٢س^{٢} − ٤س + ١

= ٢(س^{٢} − ٢س) + ١

= ٢[(س + ١)^{٢} − ١^{٢}] + ١

= ٢(س − ١)^{٢} − ٢ + ١

= ٢(س − ١)^{٢} − ١

نقطة القيمة الصغرى للمنحنى هي ل (١، −١)

ب س − ص + ٤ = ٠ أعد الترتيب

ص = س + ٤ .... (١)

ص = ٢س^{٢} − ٤س + ١ .... (٢)

عند نقاط التقاطع يكون:

س + ٤ = ٢س^{٢} − ٤س + ١ أو

٢س^{٢} − ٥س − ٣ = ٠

حلل إلى العوامل لتحصل على:

(٢س + ١)(س − ٣) = ٠

س = −$\frac{١}{٢}$ أو س = ٣ (النقطة ل)

عوّض عن س = −$\frac{١}{٢}$ في المعادلة (١) لتحصل على:

ص = −$\frac{١}{٢}$ + ٤ أو ص = ٣$\frac{١}{٢}$

النقطة ل $\left(-\frac{١}{٢}، ٣\frac{١}{٢}\right)$

نقطة منتصف ك ل هي $\left(\frac{١ + ٣}{٢}، \frac{-١ + ٧}{٢}\right)$ أو (٢، ٣)

ميل المستقيم الواصل بين النقطتَين (٢، ٣) و $\left(-\frac{١}{٢}، ٣\frac{١}{٢}\right)$ هو:

$\frac{٣ - ٣\frac{١}{٢}}{٢ - -\frac{١}{٢}}$ أو −$\frac{١}{٥}$

استخدم الصيغة ص − ص$_{١}$ = م(س − س$_{١}$) لتحصل على:

ص − ٣ = −$\frac{١}{٥}$ (س − ٢)

ص = ٣ − $\frac{١}{٥}$(س − ٢)